Université Paris-Dauphine | Tunis

Concours d'admission en 3ème année Licence

Mathématiques et Informatiques de la Décision et des Organisations

Parcours Actuariat

Session 2014

Deuxième Épreuve de Mathématiques

Durée: 4 heures 4 pages

La qualité de la rédaction, le soin de la présentation et la rigueur des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies. L'usage de tout ouvrage de référence et de tout autre matériel électronique est strictement interdit.

Comme de coutume, $\mathbb{R}$ désigne la droite réelle. Pour tout intervalle non vide I de $\mathbb{R}$, on note $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions définies et continues de I dans $\mathbb{R}$. Le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ des fonctions polynomiales est noté $\mathcal{P}(I,\mathbb{R})$. Donc, si $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ alors $f \in \mathcal{P}(I,\mathbb{R})$ si, et seulement si, il existe un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{R}$ tel que $f(x) = P(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En outre, on note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{N}^*$ celui des entiers naturels non nuls. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $p_n \in \mathcal{P}(I,\mathbb{R})$ par $p_n(x) = x^n$ pour tout $x \in I$. En particulier, $p_0(x) = 1$ pour tout $x \in I$.

L'épreuve comporte quatre partie. Dans la première, on démontre le Théorème de Korovkin. Ce théorème sera utile dans la première preuve du Théorème de Weiertrass, proposée dans la deuxième partie. La troisième partie fournie une deuxième preuve du Théorème de Weiertrass, qui sera employé dans la dernière partie pour établir l'injectivité de la Transformation de Laplace.

1 Théorème de Korovkin

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Une fonction $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ est dite *positive* si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a,b]$. On note $\mathcal{C}^+([a,b],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions positives dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Un endomorphisme T de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ est dit *croissant* si $T(f) \in \mathcal{C}^+([a,b],\mathbb{R})$ pour tout $f \in \mathcal{C}^+([a,b],\mathbb{R})$. Le but de cette partie est d'établir le résultat suivant.

> **Théorème de Korovkin.** *Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'endomorphismes croissants de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ telle que, pour tout $k \in \{0,1,2\}$, la suite $(T_n(p_k))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers p_k sur $[a,b]$. Alors, pour tout $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, la suite $(T_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$.*

1. Soient $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ et T un endomorphisme croissant de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. En outre, on se donne ϵ, un réel strictement positif.

1.1. Justifier l'existence d'un réel θ strictement positif tel que, si $x, y \in [a,b]$ et $|x-y| < \theta$, alors $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$.

1.2. Soient $x, y \in [a,b]$. Montrer que $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon + 2\dfrac{\|f\|_\infty}{\theta}(x-y)^2$.

1.3. On fixe $x \in [a, b]$. Etablir l'inégalité (dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$)

$$|T(f) - f(x) T(p_0)| \leq \epsilon T(p_0) + 2\frac{\|f\|_\infty}{\theta}\left(T(p_2) - 2xT(p_1) + x^2 T(p_0)\right).$$

2. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'endomorphismes croissants de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ telle que, pour tout $k \in \{0, 1, 2\}$, la suite $(T_k(p_k))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers p_k sur $[a, b]$.

2.1. On définit une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ en posant

$$g_n = T_n(p_2) - 2p_1 T_n(p_1) + p_2 T_n(p_0) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[a, b]$.

2.2. Soient $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ et $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ définie par

$$h_n(x) = (T_n(f))(x) - f(x)(T_n(p_0))(x) \quad \text{pour tout } (n, x) \in \mathbb{N} \times [a, b].$$

Montrer que $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[a, b]$.

2.3. Conclure.

2 Théorème de Weiertrass

Dans cette partie, on se propose d'utiliser le Théorème de Korovkin, démontré dans la partie précédente, pour établir le résultat suivant.

Théorème de Weiertrass. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Alors toute fonction de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions de $\mathcal{P}([a, b], \mathbb{R})$.*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \{0, ..., n\}$, on définit $B_{n,k} \in \mathcal{P}([0, 1], \mathbb{R})$ par

$$B_{n,k}(x) = \complement_n^k x^k (1 - x)^{n-k} \quad \text{pour tout } x \in [0, 1].$$

En outre, on condisère l'application $B_n : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \to \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ définie par

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k} \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}).$$

3. Montrer que B_n est un endomorphisme croissant pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit $\varphi_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $\varphi_n(x, y) = \left(x\mathrm{e}^{y/n} + 1 - x\right)^n$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

4.1. On fixe $y \in \mathbb{R}$ et on définit $f_y \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ par $f_y(x) = \mathrm{e}^{xy}$ pour tout $x \in [0, 1]$. Montrer que

$$(B_n(f_y))(x) = \varphi_n(x, y) \quad \text{pour tout } x \in [0, 1].$$

4.2. En déduire que $(B_n(p_k))(x) = \dfrac{\partial^k \varphi_n}{\partial y^k}(x, 0)$ pour tout $(x, k) \in [0, 1] \times \mathbb{N}$.

4.3. Soit $k \in \{0, 1, 2\}$. Exprimer $B_n(p_k)$ en fonction de p_k.

5. En déduire que si $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ alors la suite $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

6. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $\tau : [0, 1] \to [a, b]$ l'application donnée par $\tau(x) = a + (b - a)x$ pour tout $x \in [0, 1]$. Montrer que τ est bijective et déterminer τ^{-1}, l'application réciproque de τ.

7. Compléter la démonstration du Théorème de Weiertrass énoncé ci-dessus.

3 Théorème de Weiertrass et convolution

L'objectif de cette partie est de fournir une deuxième preuve du Théorème de Weiertrass. A ce propos, on pose

$$a_n = \int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right)^n \mathrm{d}x \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

8. Montrer que $a_n \geq \dfrac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit une fonction $\rho_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en posant

$$\rho_n(x) = \frac{1}{a_n}\left(1 - x^2\right)^n \text{ si } |x| \leq 1 \quad \text{et} \quad \rho_n(x) = 0 \text{ sinon.}$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que ρ_n est intégrable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(x)\,\mathrm{d}x$.

10. Soit θ un réel strictement positif. Montrer que la suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[\theta, +\infty[$.

11. Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ nulle en dehors de $[-1/2, 1/2]$.

11.1. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, on considère la fonction $f_{n,x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$f_{n,x}(y) = f(x - y)\,\rho_n(y) \quad \text{pour tout } y \in \mathbb{R}.$$

11.2. Montrer que $f_{n,x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ pour tout $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{n,x}(y)\,\mathrm{d}y \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

11.3. Montrer que $f_n \in \mathcal{P}([-1/2, 1/2], \mathbb{R})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

11.4. Etablir

$$f(x) - f_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(f(x) - f(x-y)\right)\rho_n(y)\,\mathrm{d}y \quad \text{pour tout } (n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}.$$

11.5. En déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

12. Soient a un réel strictement positif et $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ nulle en dehors de $[-a, a]$. Montrer que f est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

13. Retrouver le Théorème de Weiertrass.

4 Injectivité de la transformation de Laplace

L'objectif de cette partie est de montrer ce qu'on a l'habitude d'appeler l'injectivité de la Transformation de Laplace. A cet égard, on note $\mathbb{C}$ le plan complexe.

14. Soient $\omega \in [0, +\infty[$ et $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction continue et intégrable. Montrer que la fonction $g : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ définie par $g(x) = \mathrm{e}^{-\omega x} f(x)$ pour tout $x \in [0, +\infty[$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Pour toute fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ continue et intégrable, on considère une fonction $\mathfrak{L}(f) : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ définie par

$$\mathfrak{L}(f)(\omega) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\omega t} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{pour tout } \omega \in [0, +\infty[.$$

Dans la suite, on se donne une fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ continue et intégrable. De plus, on note $F : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ définie par

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{pour tout } x \in [0, +\infty[.$$

15. Justitifer l'existence de $\mathfrak{L}(F)(\omega)$ pour tout $\omega \in]0, +\infty[$.

16. Etablir $\mathfrak{L}(f)(\omega) = \omega \mathfrak{L}(F)(w)$ pour tout $\omega \in]0, +\infty[$.

17. Montrer que si $n \in \mathbb{N}$ alors

$$\mathfrak{L}(F)(n+1) = \int_0^1 t^n F(-\ln t)\,\mathrm{d}t.$$

On suppose désormais que $\mathfrak{L}(f) = 0$ et on note G la fonction définie sur $[0, 1]$ par

$$G(0) = 0 \quad \text{et} \quad G(x) = xF(-\ln x) \ \text{ pour tout } x \in]0, 1].$$

18. Vérifier que

$$\int_0^1 t^n G(t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

19. En déduire que,

$$\int_0^1 p(t)\, G(t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad \text{pour tout } p \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}).$$

20. Montrer que $G(x) = 0$ pour tout $x \in [0, 1]$.

21. En déduire que f est nulle.

Fin de l'épreuve