Université Paris-Dauphine | Tunis

CONCOURS D'ADMISSION EN 3ÈME ANNÉE LICENCE

MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE LA DÉCISION ET DES ORGANISATIONS

MENTION MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

SESSION 2015

Deuxième Epreuve de Mathématiques

DURÉE: 3 HEURES | 4 PAGES

La qualité de la rédaction, le soin de la présentation et la rigueur des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies. L'usage de tout ouvrage de référence et de tout autre matériel électronique est strictement interdit.

On note $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels. Dans tout ce qui suit, X est un ensemble non vide et $\mathbb{R}^X$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de X dans $\mathbb{R}$. On définit $\mathrm{e} \in \mathbb{R}^X$ par

$$\mathrm{e}(x) = 1 \quad \text{pour tout } x \in X.$$

Pour tout $f \in \mathbb{R}^X$, note

$$Z(f) = \{x \in X : f(x) = 0\}.$$

Si $f \in \mathbb{R}^X$ et $Z(f) = \emptyset$, on peut définir une fonction $f^* \in \mathbb{R}^X$ en posant

$$f^*(x) = \frac{1}{f(x)} \quad \text{pour tout } x \in X.$$

On rappelle qu'on introduit une multiplication commutative sur $\mathbb{R}^X$ en posant

$$(fg)(x) = f(x)\,g(x) \quad \text{pour tous } f, g \in \mathbb{R}^X \text{ et } x \in X.$$

On remarque au passage que

$$\mathrm{e}f = f \quad \text{pour tout } f \in \mathbb{R}^X$$

et que

$$f^* f = \mathrm{e} \quad \text{pour tout } f \in \mathbb{R}^X \text{ vérifiant } Z(f) = \emptyset.$$

Un sous-espace vectoriel A de $\mathbb{R}^X$ est dit ***sous-algèbre*** de $\mathbb{R}^X$ si

$$\mathrm{e} \in A \quad \text{et} \quad fg \in A \quad \text{pour tout } (f, g) \in A^2.$$

Par exemple, si X est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ alors l'ensemble $C(X, \mathbb{R})$ des fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$ est une sous-algèbre de $\mathbb{R}^X$.

On rappelle également que toute application linéaire d'un sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^X$ dans $\mathbb{R}$ est appelée ***forme linéaire*** sur E. Ainsi, une application $\psi : E \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire sur E si, et seulement si,

$$\psi(\alpha f + g) = \alpha \psi(f) + \psi(g) \quad \text{pour tous } f, g \in E \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Une forme linéaire ψ sur E est dite ***non nulle*** s'il existe $f \in E$ tel que $\psi(f) \neq 0$. Soient A est une sous-algèbre de $\mathbb{R}^X$ et ψ une forme linéaire sur A. On dit que ψ est ***multiplicative*** si

$$\psi(fg) = \psi(f)\,\psi(g) \qquad (f, g \in A).$$

Si ψ est à la fois non nulle et multiplicative, on dit que ψ est un ***caractère*** sur A.

L'objectif du problème suivant est de décrire les caractères sur certaines sous-algèbres de $\mathbb{R}^X$.

I/ Questions préliminaires

Soient A une sous-algèbre de $\mathbb{R}^X$ et ψ une forme linéaire sur A. On note

$$\ker \psi = \{f \in A : \psi(f) = 0\}.$$

1. Montrer

$$f - \psi(f)\,\mathrm{e} \in \ker \psi \quad \text{pour tout } f \in A.$$

2. Prouver que si ψ est multiplicative alors $\psi(\mathrm{e}) \in \{0, 1\}$.

3. Soit ψ un caractère de A.

3.1. Montrer que $\psi(\mathrm{e}) = 1$.

3.2. Soit $f \in A$ telle que $Z(f) = \emptyset$ et $f^* \in A$. Montrer que $\psi(f) \neq 0$.

4 Montrer que ψ est un caractère si, et seulement si,

$$\psi\left(f^2\right) = \psi(f)^2 \quad \text{pour tout } f \in A$$

(on pourra penser à une identité remarquable).

II/ Caractères sur les sous-algèbres pleines

Dans de cette partie, on considère une sous-algèbre A de $\mathbb{R}^X$ et une forme linéaire ψ sur A. On dit que A est ***pleine*** si

$$f^* \in A \quad \text{pour tout } f \in A \text{ inversible.}$$

Par ailleurs, on dit que ψ est une 2-***évaluation*** sur A si, pour tout $(f, g) \in A^2$, il existe $x \in X$ tel que

$$\psi(f) = f(x) \quad \text{et} \quad \psi(g) = g(x).$$

Tout au long de cette partie, on suppose que A est pleine.

5. Soit ψ un caractère sur A.

5.1. Montrer que si $f \in \ker \psi$ alors $Z(f) \neq \emptyset$ (on pourra raisonner par l'absurde et utiliser la question **3.2**).

5.2. En déduire que, pour tout $f \in A$, il existe $x \in X$ tel que $\psi(f) = f(x)$.

6. Dans cette question, on suppose que $X = [0, 1]$ et que $A = C([0, 1])$. En outre, on définit une application $\varphi : A \to \mathbb{R}$ en posant

$$\varphi(f) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{pour tout } f \in A.$$

6.1. Montrer que φ est une forme linéaire sur A.

6.2. La forme linéaire φ est-elle un caractère sur A?

6.3. On se donne $f \in A$. Justifier brièvement l'existence des deux nombres réels

$$I(f) = \min\{f(x) : x \in X\} \quad \text{et} \quad S(f) = \max\{f(x) : x \in X\}.$$

6.4. Montrer que
$$I(f) \leq \varphi(f) \leq S(f) \quad \text{pour tout } f \in A.$$

6.5. En déduire qu'il existe $x \in X$ tel que $\varphi(f) = f(x)$.

6.6. La réciproque de la question **5** est elle vraie?

7. Soit ψ une 2-évaluation sur A.

7.1. Montrer que si f est une fonction positive de $\mathbb{R}^X$ alors $\psi(f) \geq 0$.

7.2. Soit $f \in A$. Etablir l'exsitence de $x \in A$ tel que
$$\psi\left(f^2\right) = f(x)^2 = \psi(f)^2.$$

7.3. En déduire que ψ est un caractère sur A.

8. Soient ψ un caractère sur A et $f, g \in A$. On pose
$$h = (f - \psi(f)\,\mathrm{e})^2 + (g - \psi(g)\,\mathrm{e})^2$$
(on remarquera, sans démonstration, que $h \in A$).

8.1. Calculer $\psi(h)$.

8.2. En déduire que $Z(h) \neq \emptyset$.

8.3. Conclure que ψ est une 2-évaluation sur A.

9. Dans cette question, on suppose que X est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et on pose $A = C(X, \mathbb{R})$. De plus, on se donne un caractère ψ sur A et on note
$$w = \psi(u),$$
où u est la fonction de A définie par
$$u(x) = x \quad \text{pour tout } x \in X.$$

9.1. Soit $f \in A$. Etablir l'existence de $x \in X$ tel que
$$\psi(f) = f(x) \quad \text{et} \quad \psi(u) = u(x).$$

9.2. En déduire que
$$\psi(f) = f(w) \quad \text{pour tout } f \in A.$$

III/ Caractères sur les sous-algèbres presque pleines

On dit qu'une sous-algèbre A de $\mathbb{R}^X$ est ***presque pleine*** si $f^* \in A$ pour tout $f \in A$ telle que
$$|f(x)| \geq 1 \quad \text{pour tout } x \in X.$$

Par aileurs, on dit qu'une forme linéaire ψ sur A est une ***presque 2-évaluation*** si, pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout $(f, g) \in A^2$, il existe $x \in X$ tel que
$$|\psi(f) - f(x)| < \epsilon \quad \text{et} \quad |\psi(g) - g(x)| < \epsilon$$

Soit A une sous-algèbre de $\mathbb{R}^X$ et ψ une forme linéaire sur A.

10. Montrer que si A est pleine alors A est presque pleine.

11. Dans cette question, on suppose $X = [0, +\infty[$ et que A est la sous-algèbre de $\mathbb{R}^X$ donnée par

$$A = \left\{ f \in C(X, \mathbb{R}) : \lim_{+\infty} f \text{ existe dans } \mathbb{R} \right\}.$$

11.1. Montrer que A est presque pleine.

11.2. A est-elle pleine?

Dans tout la suite, on suppose que A est presque pleine.

12. Soit ψ une presque 2-évaluation sur A. On se donne $f \in A$ et $\epsilon > 0$.

12.1. Etablir l'existence de $x \in X$ tel que

$$\left|\psi\left(f^2\right) - f(x)^2\right| < \epsilon \quad \text{et} \quad |\psi(f) - f(x)| < \epsilon$$

12.2. Trouver une constante $a > 0$ telle que

$$\left|\psi\left(f^2\right) - \psi(f)^2\right| < a\epsilon.$$

12.3. En déduire que ψ est un caractère sur A.

13. On considère un carcatère ψ sur A. Soient $f, g \in A$ et $\epsilon > 0$. On définit $h \in A$ par

$$h = \frac{1}{\epsilon^2}\left[(f - \psi(f))^2 + (g - \psi(g))^2\right].$$

13.1. Calculer $\psi(h)$.

13.2. En déduire l'existence de $x \in X$ tel que $|h(x)| < 1$.

13.3. Conclure que ψ est une presque 2-évaluation sur A.

14. On reprend la sous-algèbre de la question**11** et on définit une application $\psi : A \to \mathbb{R}$ en posant

$$\psi(f) = \lim_{+\infty} f \quad \text{pour tout } f \in A.$$

14.1. Montrer que ψ est un caractère sur A.

14.2. En déduire que ψ est une presque 2-évaluation sur A.

14.3. ψ est-elle une 2-évaluation sur A?

Fin de l'épreuve