Université Paris-Dauphine | Tunis

CONCOURS D'ADMISSION EN 3ÈME ANNÉE LICENCE

MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE LA DÉCISION ET DES ORGANISATIONS

PARCOURS ACTUARIAT

SESSION 2014

Première Épreuve de Mathématiques

DURÉE: 3 HEURES — 4 PAGES

La qualité de la rédaction, le soin de la présentation et la rigueur des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies. L'usage de tout ouvrage de référence et de tout autre matériel électronique est strictement interdit.

Dans ce problème, E désigne un espace préhilbertien réel. Le produit scalaire de deux vecteurs $x, y \in E$ est noté $\langle x, y\rangle$. En outre, la norme d'un vecteur $x \in E$ est notée $\|x\|$. On a donc l'égalité $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$.

Un endomorphisme S de E est dit ***symétrique*** si

$$\langle S(x), y\rangle = \langle x, S(y)\rangle \quad \text{pour tout } (x, y) \in E \times E.$$

En revanche, un endomorphisme A de E est dit ***anti-symétrique*** si

$$\langle A(x), y\rangle = -\langle x, A(y)\rangle \quad \text{pour tout } (x, y) \in E \times E.$$

Les notations suivantes seront adoptées tout au long du sujet.

- $\mathcal{L}(E)$: L'espace vectoriel réel des endomorphismes de E.
- $\mathcal{S}(E)$: L'ensemble des endomorphismes symétriques de E.
- $\mathcal{A}(E)$: L'ensemble des endomorphismes anti-symétriques de E.
- $\ker(T)$: Le noyau d'un endomorphisme T de E.
- $\mathbb{R}$: la droite réelle.
- $\mathbb{N}$: L'ensemble des entiers naturels.
- $\mathbb{N}^*$: L'ensemble des entiers naturels non nuls.

Le but de ce problème, qui comporte trois parties, est d'introduire la notion d'endomorphisme régulier en dimension quelconque et d'en étudier les premières propriétés. Deux exemples en dimension infinie seront examinés à cet égard. Enfin, on se servira de cette notion pour fournir une nouvelle étude de la réduction des endomorphismes normaux (les endomorphismes symétriques en particulier) en dimension finie.

1 Endomorphismes réguliers

1. Montrer que $\mathcal{S}(E)$ et $\mathcal{A}(E)$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$.

2. Vérifier que $\mathcal{S}(E)$ et $\mathcal{A}(E)$ sont en somme directe.

Dans la suite du problème, on pose

$$\mathcal{R}(E) = \mathcal{S}(E) \oplus \mathcal{A}(E).$$

Les éléments de $\mathcal{R}(E)$ sont appelés ***endomorphismes réguliers*** de E. Autrement dit, si $R \in \mathcal{L}(E)$ alors R est régulier si, et seulement si, il existe un unique couple (S_R, A_R) de $\mathcal{S}(E) \times \mathcal{A}(E)$ tel que $R = S_R + A_R$. A cet égard, on dit que S_R est la ***composante symétrique*** de R et A_R est sa ***composante anti-symétrique***. Enfin, on pose

$$R^* = S_R - A_R \quad \text{pour tout } R \in \mathcal{R}(E).$$

3. Soit $R \in \mathcal{R}(E)$. Exprimer S_R et A_R en fonction de R et R^*.

Dans la suite de cette partie, on se fixe $T \in \mathcal{L}(E)$.

4. Montrer que $T \in \mathcal{S}(E)$ si, et seulement si, $T \in \mathcal{R}(E)$ et $T = T^*$.

5. Trouver une caractérisation analogue des endomorphismes anti-symétriques de E.

6. Montrer que si $T \in \mathcal{R}(E)$ alors

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle \quad \text{pour tout } (x,y) \in E \times E.$$

7. On suppose dans cette question qu'il existe $V \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, V(y)\rangle \quad \text{pour tout } (x,y) \in E \times E.$$

Montrer que $T \in \mathcal{R}(E)$ et que $V = T^*$.

8. On suppose que $T \in \mathcal{R}(E)$. Etablir l'égalité $\ker T = \ker(T^* \circ T)$.

2 Exemples en dimension infinie

Comme de coutume, on note $\mathcal{C}([0,1])$ l'espace vectoriel réel des fonctions définies et continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. De plus, la fonction produit de deux fonctions $f, g \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ est notée $f \times g$. En d'autres termes, $f \times g$ est définie par

$$(f \times g)(t) = f(t)\, g(t) \quad \text{pour tout } t \in [0,1].$$

On rappelle que $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ est un espace préhilbertien pour le produit scalaire défini par

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 (f \times g)(t)\, \mathrm{d}t \quad \text{pour tous } f, g \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}).$$

Pour tout $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, on définit la fonction $T_f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ en posant

$$T_f(t) = f(0) \quad \text{pour tout } t \in [0,1]$$

(on notera que T_f est une fonction constante). On peut donc définit l'application $T : \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) \to \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ en posant

$$T(f) = T_f \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}).$$

9. Montrer que $T \in \mathcal{L}\left(\mathcal{C}\left(\left[0,1\right],\mathbb{R}\right)\right)$.

10. Soient $f, g \in \mathcal{C}\left(\left[0,1\right],\mathbb{R}\right)$. Etablir l'égalité

$$\langle T\left(f\right), g\rangle = f\left(0\right)\int_0^1 g\left(t\right)\mathrm{d}t.$$

11. On suppose dans cette question que T est régulier et on se donne $g \in \mathcal{C}\left(\left[0,1\right],\mathbb{R}\right)$.

11.1. Soit $e \in \mathcal{C}\left(\left[0,1\right],\mathbb{R}\right)$ tel que $e\left(t\right) = t$ pour tout $t \in \left[0,1\right]$. En utilisant la Question **9**, montrer que

$$\langle e \times T^*\left(g\right), T^*\left(g\right)\rangle = 0.$$

11.2. En déduire que $T^*\left(g\right) = 0$.

12. Conclure que T n'est pas régulier.

A présent, pour tout $f \in \mathcal{C}\left(\left[0,1\right],\mathbb{R}\right)$, on définit deux fonctions $U_f, V_f \in \mathcal{C}\left(\left[0,1\right],\mathbb{R}\right)$ en posant

$$U_f\left(t\right) = \int_0^t f\left(s\right)\mathrm{d}s \text{ et } V_f\left(t\right) = \int_t^1 f\left(s\right)\mathrm{d}s \text{ pour tout } t \in \left[0,1\right].$$

On peut ainsi considérer deux applications $U, V : \mathcal{C}\left(\left[0,1\right],\mathbb{R}\right) \to \mathcal{C}\left(\left[0,1\right],\mathbb{R}\right)$ en posant

$$U\left(f\right) = U_f \text{ et } V\left(f\right) = V_f \text{ pour tout } f \in \mathcal{C}\left(\left[0,1\right],\mathbb{R}\right).$$

13. Vérifier que $U, V \in \mathcal{L}\left(\mathcal{C}\left(\left[0,1\right],\mathbb{R}\right)\right)$.

14. Soient $f, g \in \mathcal{C}\left(\left[0,1\right],\mathbb{R}\right)$. Etablir l'égaliter $\langle U\left(f\right), g\rangle = \langle f, V\left(g\right)\rangle$ (il est conseillé d'effectuer une intégration par parties).

15. Que peut-on conclure?

3 Endomorphismes unitaires

On rappelle que E est un espace préhilbertien réel. L'endomorphisme identité de E est noté I_E. En outre, on note $\mathbb{R}\left[X\right]$ l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$. Soient $T \in \mathcal{L}\left(E\right)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note

$$T^0 = I_E \quad \text{et} \quad T^n = T \circ \cdots \circ T \ (n \text{ fois}).$$

De plus, si

$$\Delta\left(X\right) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{R}\left[X\right],$$

on pose

$$\Delta\left(T\right) = \sum_{k=0}^{d} a_k T^k \in \mathcal{L}\left(E\right).$$

Par ailleurs, $U \in \mathcal{L}\left(E\right)$ est dit ***unitaire*** si U est régulier et si $S_U \circ A_U = A_U \circ S_U$.

Dans la suite de cette partie, on se donne $U \in \mathcal{L}\left(E\right)$ unitaire.

16. Montrer que $U \circ U^* = U^* \circ U$.

17. En déduire que $\ker(U) = \ker(U^*)$.

18. Montrer que $\ker(U) = \ker(U^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

19. Que peut-on dire de U si U est nilpotent.

20. Montrer que si $\Delta \in \mathbb{R}[X]$ alors $\Delta(U)$ est unitaire.

On suppose désormais que E est de dimension finie. En d'autres termes, E est un espace euclidien.

21. Montrer que s'il existe $\Pi \in \mathbb{R}[X]$ scindé non nul tel que $\Pi(U) = 0$ alors U est diagonalisable.

22. On se donne $S \in \mathcal{S}(E)$.

22.1. Montrer que les valeurs propres éventuelles de S sont positifs.

22.2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 - b < 0$. On pose

$$T = S^2 + 2aS + bI_E.$$

Montrer que T est inversible (on remarquera que $S^2 + 2aS$ est le “début” d'une identité remarquable).

22.3. Conclure que S est diagonalisable.

Fin de l'épreuve