# Université Paris-Dauphine | Tunis

Concours d'admission en 3ème année Licence
Mathématiques et Informatiques de la Décision et des Organisations
Mention Mathématiques Appliquées
Session 2015

**Première Epreuve de Mathématiques**

Durée: 4 heures — 4 pages

---

La qualité de la rédaction, le soin de la présentation et la rigueur des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies. L'usage de tout ouvrage de référence et de tout autre matériel électronique est strictement interdit.

---

Soient $n, p$ deux entiers naturels et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices à $n$ lignes et $p$ colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$. On note $M^*$ la matrice transposée d'une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Il est bien clair, dans ce cas, que $M^* \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. Il est à noter que, tout au long du problème, $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ sera identifier à $\mathbb{R}$.

L'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La trace d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée $\mathrm{tr}(M)$. On rappelle que la formule

$$(M|N) = \mathrm{tr}(M^*N) \quad \text{pour tout } (M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose désormais que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni de ce produit scalaire et de la norme associée donnée par

$$\|M\| = \sqrt{\mathrm{tr}(M^*M)} \quad \text{pour tout } M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Une matrice $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite ***symétrique*** si $S^* = S$. L'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est noté $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Une matrice $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est dite ***positive*** si

$$X^*SX \geq 0 \quad \text{pour tout } X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

De plus, une matrice $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est dite ***définie positive*** si

$$X^*SX > 0 \quad \text{pour tout } X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

L'ensemble des matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est noté $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et celui des matrices symétriques définies positives est noté $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

On rappelle qu'une matrice $O \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite ***orthogonale*** si $O^*O = I_n$, où $I_n$ désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est noté $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

L'objectif essentiel du problème suivant est de déterminer les distances d'une matrice donnée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à certaines parties non vides de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A cet effet, on rappelle que la ***distance***, notée $\mathrm{d}(A, \mathcal{X})$, d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à une partie non vide $\mathcal{X}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est définie par

$$\mathrm{d}(A, \mathcal{X}) = \inf\{\|A - M\| : M \in \mathcal{X}\}.$$

On note au passage que, comme $\mathcal{X}$ est non vide, cette borne inférieure est un réel positif bien-défini (on ne demande pas de le justifier).

## I/ Distance à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite ***antisymétrique*** si $A^* = -A$. On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**1.** Vérifier que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**2.** Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux, c'est-à-dire,

$$(A|S) = 0 \quad \text{pour tout } (A,S) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{R}).$$

**3.** Etablir les égalités

$$[\mathcal{S}_n(\mathbb{R})]^{\perp} = \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad [\mathcal{A}_n(\mathbb{R})]^{\perp} = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),$$

où, pour une partie non vide $\mathcal{X}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$[\mathcal{X}]^{\perp} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : (M|N) = 0 \text{ pour tout } N \in \mathcal{X}\}.$$

**4.** On note $\Pi$ la projection orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\Pi(M) = \frac{1}{2}(M^* + M) \quad \text{pour tout } M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

**5.** En déduire que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors

$$\mathrm{d}(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \frac{1}{2}\|A^* - A\|.$$

**6.** Trouver $\mathrm{d}(A, \mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$ pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

## II/ Distance à $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$

On note $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et se donne $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'ensemble des valeurs propres réelles de $A$ est noté $\mathrm{Sp}(A)$. On pose alors

$$\Delta(A) = \{|\lambda| : \lambda \in \mathrm{Sp}(A) \text{ et } \lambda \neq 0\}$$

et

$$r(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Delta(A) = \emptyset \\ \\ \min(\Delta(A)) & \text{si } \Delta(A) \neq 0. \end{cases}$$

On définit une suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices en posant

$$P_k = A - \frac{r}{n+1} I_n \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

**7.** $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? Jusitifer la réponse.

**8.** Donner un exemple d'une matrice $A$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\Delta(A) = \emptyset$.

**9.** Montrer que l'intervalle ouvert $]-r, r[$ ne contient aucune valeur propre non nulle de $A$.

**10.** En déduire que $P_k \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

**11.** Montrer que la suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers une limite que l'on déterminera.

**12.** Que vaut $\mathrm{d}(A, \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}))$?

**13.** Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $A$ pour qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\mathrm{d}(A, \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})) = \|A - B\|.$$

## III/ Distance d'une symétrique positive à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

On se donne $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^+$.

**14.** Montrer que si $\lambda$ est une valeur propre de $S$ alors $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

**15.** Montrer qu'il existe $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ et $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tels que $S = O^* D O$, où $D$ est la matrice diagonale définie par

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

**16.** Etablir

$$\|S - \Omega\| = \|D - O\Omega O^*\| \quad \text{pour tout } \Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}).$$

**17.** En déduire que

$$\mathrm{d}(S, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \mathrm{d}(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})).$$

**18.** Montrer que si $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ alors

$$\|D - \Omega\|^2 = n - 2\mathrm{tr}(D\Omega) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2.$$

**19.** Prouver que

$$\mathrm{tr}(D\Omega) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \quad \text{pour tout } \Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}).$$

**20.** En déduire, en combinant et , que

$$\mathrm{d}(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \|D - I_n\|.$$

**21.** Conclure que

$$\mathrm{d}(S, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \|S - I_n\|.$$

## VI/ Distance d'une matrice quelconque à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

Soient $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ et $B = P^* P$.

**22.** Vérifier que $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

**23.** En déduire qu'il existe $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $B = \Omega^* D \Omega$, où

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

**24.** Justifier l'existence de $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $S^2 = B$.

**25.** Montrer que $PS^{-1} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

**26.** En déduire qu'il existe $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $P = OS$.

Soit $A$ une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**27.** Justifier l'existence d'une suite $(O_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et d'une suite $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que la suite $(O_k S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers $A$ (on pourra utiliser les Questions et ).

**28.** Soit $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Calculer $\|\Omega\|$.

**29.** Justifier la continuité de l'application $\Gamma : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\Gamma(M) = M^* M \quad \text{pour tout } M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

**30.** Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**31.** En déduire l'existence de $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et de $S \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ tels que $A = OS$.

**32.** Montrer que

$$\|\Omega M\| = \|M\Omega\| = \|M\| \quad \text{pour tout } (M, \Omega) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}).$$

**33.** En déduire que $\mathrm{d}(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \mathrm{d}(S, \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$.

**34.** Conclure que $\mathrm{d}(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \|A - O\|$.

Fin de l'épreuve